PRIMO FOGLIO

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

① Quaderno teoria

② Quaderno teoria

③ Calcolare l'angolo formato dei vettori v e w assegnati nello spazio euclideo standard di dimensione opportuna.

(a) $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\quad \arccos \frac{(3)(-1)+(4)(5)}{\sqrt{(3)^2+(4)^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+(5)^2}} \overset{\text{arccos}}{=} \frac{17}{5\sqrt{26}}$ (Prodotto scalare / prodotto delle norme)

(b) $v = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad \arccos \frac{(7)(-1)+(2)(3)+(-3)(4)}{\sqrt{(7)^2+(2)^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+(3)^2+(4)^2}} = \arccos \frac{-13}{\sqrt{62}\cdot\sqrt{26}}$

(c) $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad w = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

(d) $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \arccos \frac{(2)(-1)+(3)(3)+(-1)(2)+(1)(2)}{\sqrt{(2)^2+(3)^2+(-1)^2+(1)^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+(3)^2+(2)^2+(2)^2}} \overset{\text{arccos}}{=} \frac{7}{\sqrt{15}\cdot 3\sqrt{2}}$

④ Verificare che nello spazio $C^0([0,1],\mathbb{R})$ dotato del prodotto scalare $\langle f|g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$ i vettori S e C dati da $S(t) = \text{sen}(2\pi t)$ $C(t) = \cos(2\pi t)$ sono ortogonali tra loro e hanno la stessa norma, trovandone il valore.

$$\langle S|C\rangle = \int_0^1 S(t)\cdot C(t)\,dt = \int_0^1 \text{sen}(2\pi t)\cos(2\pi t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \text{sen}(2\pi t)\cdot d(\text{sen}(2\pi t)) =$$

$$= \frac{1}{8\pi}\cos(4\pi t)\Big|_0^1 = 0 \quad \checkmark \text{ Sono perpendicolari}$$

NORME: $\|S\|^2 = \int_0^1 \text{sen}^2(2\pi t)\,dt = \frac{1}{2}$

$$\|C\|^2 = \int_0^1 \cos^2(2\pi t)\,dt = \frac{1}{2}$$

⑤ Calcolare l'angolo formato dalle matrici $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ nello spazio $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ dotato del prodotto scalare $\langle A|B\rangle = \text{Tr}({}^tB\cdot A)$

$$\text{Tr}({}^tB\cdot A) = \sum_{i=1}^{m}({}^tB\cdot A)_{ii} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}({}^tB)_{ij}\cdot(A)_{ji} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_{ji}\cdot b_{ji}.$$ È il prodotto scalare $\mathbb{R}^{m\cdot m}$

Dunque: $\arccos \frac{(2)(1)+(1)(3)+(-1)(-2)+(0)(1)+(-2)(0)+(1)(-1)}{\sqrt{(2)^2+(1)^2+(-1)^2+(0)^2+(-2)^2+(1)^2}\cdot\sqrt{(1)^2+(3)^2+(-2)^2+(1)^2+(0)^2+(-1)^2}} = \arccos \frac{6}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{16}}$

⑥ Nello spazio $\mathbb{R}_{\le 2}[t]$ dotato del prodotto scalare

$$\langle p(t) \mid q(t) \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$$

determinare un polinomio di norma $\sqrt{3}$ ortogonale a $1+t$ e a $1+t^2$

$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ e $q(t) = 1+t$ e $\varphi(t) = 1+t^2$

$$\langle p(t) \mid 1+t \rangle = \overset{p(0)\cdot q(0)}{a_0 \cdot 1} + \overset{p(1)\cdot q(1)}{(a_0+a_1+a_2)\cdot 2} + \overset{p(2)\cdot q(2)}{(a_0+2a_1+4a_2)\cdot 3}$$

$$\langle p(t) \mid 1+t^2 \rangle = \overset{p(0)\cdot \varphi(0)}{a_0 \cdot 1} + \overset{p(1)\cdot \varphi(1)}{(a_0+a_1+a_2)\cdot 2} + \overset{p(2)\cdot \varphi(2)}{(a_0+2a_1+4a_2)\cdot 5}$$

Faccio i calcoli e uguaglio a zero (deve essere ortogonale)

$$\begin{cases} 3a_0+2a_1+2a_2=0 \\ a_0+2a_1+4a_2=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_0=2 \\ a_1=-5 \\ a_2=+2 \end{cases} \quad \| 2-5t+2t^2 \| = 4+1+0=5$$

⑦ Stabilire se l'applicazione assegnata sia bilineare, in tal caso se sia simmetrica, in tal caso se sia definita positiva:

(a) $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = 7x_1y_2 + 8y_1y_2 - 5x_2y_1$

- No bilineare perché ho il valore $8y_1y_2$. Infatti $f\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)\right) \neq 0$

(b) $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = -3x_1y_1 + 2x_1y_2 + 8x_2y_1 + 2x_2y_2$

- Bilineare: Sì, perché ho solo x e y moltiplicati per un coeff.
- No simmetrica, poiché nel secondo termine, se scambio x e y ottengo $2y_1x_2 \neq 2x_1y_2$ così come per il terzo termine $8x_2y_1 \neq 8y_2x_1$, e la loro somma cambia

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\right) = 2 \quad \text{ma} \quad f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)\right) = 8$$

(c) $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x,y) = 7x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 - 4x_2y_2$

- Bilineare: Sì
- Simmetrica: Sì $\quad -3x_1y_2 = (-3x_2y_1)^{-1} = -3x_1y_2$
- Def. positiva: No. $f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = -4$ con $f(x,x)$

(d) $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = 3x_1y_1 + 4x_1y_2 + 4x_2y_1 + 5x_2y_2$

- Bilineare: Sì
- Simmetrica: Sì
- Def. Positive: $f(x,x) = 3x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2$

No, poiché $f\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right) = 0$ Anzi, $f\left(\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}\right) < 0$

(e) $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = 4x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 5x_2y_2$

- Bilineare: Si
- Simmetrica: Si
- Def. Positiva: $f(x,x) = 4x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2 = \left(2x_1 - \frac{3}{2}x_2\right)^2 \underbrace{- \frac{9}{4}x_2^2 + 5x_2^2}_{\frac{11}{4}x_2^2} =$ Somma di due quadrati e quindi ≥ 0

(f) $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = 2x_1y_2 - 3x_2y_1 + 4x_3y_3$

- Bilineare: Si
- Simmetrica: No.

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

(h) $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = 4x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 5x_2y_2$

- Bilineare: Si
- Simmetrica: Si
- Def. Positiva: $f(x,x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3 = \underbrace{(x_1 + x_3)^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2}$

Somma di quadrati sempre ≥ 0

(g) $f(x,y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 3x_2y_3 + 3x_3y_2 + 2x_3y_3$

- Bilineare: Si
- Simmetrica: Si
- Def pos. $f(x,x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + 2x_3^2$

coeff. più grande quindi basta prendere x_2 e x_3 dicendo che ottengo valori negativi.

(8) Stabilire per quali delle matrici A enunciate si ha che $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è prodotto scalare: deve essere bilin, simm, e def. pos.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

- Bilineare: $\langle x|y\rangle_A = {}^t x \cdot A \cdot y = (x_1 \; x_2)\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1 \; x_2)\begin{pmatrix} 2y_1 + 3y_2 \\ 3y_1 + 4y_2 \end{pmatrix} =$

$$= 2x_1y_2 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 4x_2y_2$$

È bilineare poiché compaiono x e y legate ai coeff.

$\langle x|x\rangle_A = 2x_1^2 + \underbrace{6x_1x_2}_{3x_1x_2 + 3x_1x_2} + 4x_2^2$ (Ritrovo i coeff. della matrice)

• Simmetrica: $f(x,y) = 2x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 4x_2y_2$

Nella diagonale ho valori uguali Sì poiché $3x_1y_2 = (3x_1y_2)^{-1} = 3y_2x_2$

• Def. positive: No

Se $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = 0$, se $\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} \Rightarrow 18 - 36 + 16 < 0$

(b) $A = \begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{pmatrix}$

• Simmetrica: Sì. Nella diagonale ho valori uguali

• Def. positive: $f(x,y) = 2x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 5x_2y_2$

$f(x,x) = 2x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2 = \left(\sqrt{2}x_1 + \frac{3}{\sqrt{2}}x_2\right)^2 + \frac{1}{2}x_2^2$

È una somma di quadrati

Quindi sempre ≥ 0

(c) $A = \begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ Non è simmetrica poiché i valori nella diagonale non sono uguali.

(d) $A = \begin{pmatrix}k & 0 & 0\\ 0 & 2k & 0\\ 0 & 0 & k^2\end{pmatrix}$

• Simmetrica: Sì poiché i coeff. di sopra e sotto la diag. sono uguali rispettivamente nelle posizioni.

• Def. posit: Se e solo se i coeff. sulla diag. sono tutti positivi $0 < k < 2$

(e) $A = \begin{pmatrix}1 & 5 & \sqrt{17}\\ 5 & 3 & \sqrt{178}\\ \sqrt{17} & \sqrt{178} & 0\end{pmatrix}$

• Simm: Sì

• Def. posit: No. $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

(f) $A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 5 & -1\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}$

• Simm.: Sì

• Def. positive: $x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3 =$ ok.

$= (x_1 + 2x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + 2x_3^2$ somma di quadrati

(g) $A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 5 & 3\\ 4 & 6 & 4\end{pmatrix}$ No simm.

(h) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ • Simm: sì

• Def. pos.?: $x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

$\downarrow$

$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: $9 + 5 + 3 - 12 - 6 - 2 = -20 < 0$

(9) Caratterizzare le matrici $A \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ per le quali $\langle \cdot,\cdot \rangle_A$ è un prodotto scalare.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Così costruita è bilineare e simmetrica.
Ci chiediamo: è def. pos.?

$\Leftrightarrow ax^2 + bxy + cy^2 > 0 \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$

$a > 0$ (garantisce > 0 per $y = 0$)

divido per y^2 $\rightarrow$ $aT^2 + 2bT + c > 0 \quad T = \frac{x}{y} \quad \forall T \in \mathbb{R}$

garantisce > 0 per $y \neq 0$

$\Leftrightarrow a > 0,\ b^2 - ac < 0$ Positivo coeff. posto 1.1. e $\det(A) > 0$

$a > 0,\ \det(A) > 0$

(10) Nello spazio $\mathbb{R}^m$ dotato del prodotto scalare $\langle \cdot,\cdot \rangle_A$ con A assegnata determinare una base del sottospazio ortogonale rispetto $\langle \cdot,\cdot \rangle_A$ ai vettori indicati:

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle_A = 0$

$(x\ y) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x\ y) \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow 4x + y = 0$

$w = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad [4 \cdot -1 + 4 = 0 \checkmark]$

$\|w\|_A = \sqrt{(-1\ 4) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}} = \sqrt{(-1\ 4) \begin{pmatrix} 10 \\ 25 \end{pmatrix}} = \sqrt{90}$

$u = \frac{1}{3\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow$ Base cercata

$\sqrt{90}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$

$\downarrow$

Prodotto scalare $a_{11} > 0$

$\det A > 0$

$(\mathrm{Span}(v_1, v_2))^\perp = (\mathbb{R}^2)^\perp = \{0\}$

(c) Come (a)